



Giochi di Anacleto

Anacleto In Lab 2023



Esperimento elaborato da
Nicoletta Capitanio, Davide Ceoldo, Claudia Formentini,
Silvia Losso, Chiara Magoga, Alvis Varagnolo
del gruppo AIF Giochi di Anacleto

DETERMINAZIONE DELL'AMPIEZZA DEL FORO DI USCITA DAI TEMPI DI SVUOTAMENTO DI UN BICCHIERINO RIEMPITO D'ACQUA

- ISTRUZIONI PER I DOCENTI -

Con questo esperimento ci proponiamo di far riflettere gli studenti sul fatto che non tutte le relazioni tra grandezze sono plausibilmente lineari, nonostante alcuni dati possano suggerirlo. In secondo luogo vorremmo far capire che, anche se non conosciamo la legge analitica che descrive i dati ottenuti, si possono inferire dei risultati anche solamente utilizzando un grafico.

Concetti chiave: misure, costruzione e lettura di un grafico, inferenza di risultati dal grafico.

SPIEGAZIONE GENERALE

L'esperimento consiste nel misurare i tempi di svuotamento di determinate quantità d'acqua che fuoriescono da un bicchierino bucato sul fondo. Esiste una relazione tra i tempi di svuotamento e il volume di liquido fluìto — analiticamente complessa nella realtà — che si può trovare con facilità empiricamente.

L'analisi teorica dello svuotamento è stata svolta assumendo:

- flusso laminare, dunque teorema di Bernoulli;
- pressione al fondo del bicchiere uguale a quella al livello più alto dell'acqua (è assunzione standard nella descrizione dello svuotamento di un contenitore in aria);
- equazione di continuità, vale a dire che $S_0 \cdot v_0 = S_1 \cdot v_1$ dove S_0 e S_1 sono l'ampiezza del foro e della superficie superiore dell'acqua (che si descrive dunque come se stesse "passando attraverso un tubo" mentre scende nel contenitore) e v_0 e v_1 le rispettive velocità;

- residuo in fondo al contenitore nullo.

In condizioni ideali i tempi di svuotamento dipendono solo dalla forma del contenitore e dalla dimensione del foro d'uscita. Più nel dettaglio, l'altezza h della superficie libera del liquido dipende, a parità di volume, dalla forma del bicchierino e la velocità di uscita dipende a sua volta dall'altezza h e dalle dimensioni del foro. A parità di tutte le altre condizioni e nel caso ideale, i tempi dovrebbero essere inversamente proporzionali all'area del foro. Nella realtà sui tempi di svuotamento giocano un ruolo anche altri fattori tra cui la viscosità del fluido, ma non solo. Questi fattori rendono la relazione molto più complessa, incidono drasticamente, soprattutto se gli svuotamenti riguardano piccole quantità di liquido, come nel nostro caso.

Nel caso ideale i tempi di svuotamento seguono la seguente relazione:

$$T = \frac{1}{a\sqrt{2g}} \int_0^h \frac{A(h)}{\sqrt{h}} dh \quad \text{eq. 1}$$

dove T indica il tempo di svuotamento, h l'altezza del liquido dal foro d'uscita alla superficie libera, a è l'area del foro d'uscita (luce), $A(h)$ è l'area della superficie libera - costante solo nel caso i cui il serbatoio sia un cilindro o un parallelepipedo - g l'accelerazione di gravità. Nel nostro caso i tempi sono sempre maggiori di quelli previsti dal caso ideale, ma sono comunque descritti da una legge di potenza.

I ragazzi lavoreranno in piccoli gruppi, suggeriamo che siano almeno tre per velocizzare alcune fasi un po' ripetitive, e avranno a disposizione 150 minuti per eseguire l'esperimento.

MATERIALI OCCORRENTI PER OGNI POSTAZIONE E LORO PREPARAZIONE

- Due contenitori identici sul cui fondo è stato effettuato un foro di diversa misura;
- un cilindro graduato;
- una siringa con cui raccogliere i residui d'acqua;
- un cronometro;
- acqua;
- carta assorbente;
- fogli di carta millimetrata ed eventualmente fogli protocollo.



Come contenitori possono essere usati dei bicchierini di plastica, preferibilmente con il fondo piatto, non sagomato, anche se questo non è un elemento che pregiudica il risultato. È fondamentale che i contenitori siano di plastica rigida, così da non essere significativamente deformati tenendoli in mano. Se venissero schiacciati, la pressione esercitata sulle pareti altererebbe i risultati. È bene evitare i bicchieri di carta, perché con il passaggio dell'acqua, il bordo del foro diventa via via meno netto. È anche opportuno che i fori praticati sul fondo siano il più possibile vicini al centro.

I dati sotto riportati sono stati ottenuti con dei bicchierini “da dessert” in plastica trasparente a forma di tronco di piramide, con capacità pari a 200 ml, facilmente reperibili nei negozi dove si vendano stoviglie usa e getta oppure online. Consigliamo che la capacità dei bicchierini sia di almeno 200 ml, se minore, potrebbe essere difficoltoso vedere la non linearità della relazione. Il foro sul fondo è stato eseguito con un trapano, così da poterne determinare la dimensione con maggiore sicurezza. In alternativa si può usare un chiodo arroventato, “lisciando”, se necessario, il fondo con della carta vetrata sottile per evitare che il bordo abbia delle increspature. Denominate i due bicchierini con A e B in modo da distinguerli facilmente in base alle dimensioni del foro, che non devono essere uguali. I due fori devono essere sufficientemente diversi, almeno circa 1 mm di differenza. I fori non devono essere troppo piccoli perché altrimenti i tempi di svuotamento risulterebbero davvero lunghi ed inoltre si presenterebbero maggiori effetti di “gocciolamento” che rendono la misura dei tempi più incerta. Non devono neppure essere troppo grandi perché le misure dei tempi risulterebbero parimenti imprecise, ma perché troppo brevi. Le nostre prove sono state effettuate con fori da 2.8 mm, 3.2 mm, 4.0 mm.



Come cilindro graduato ne basta uno da 200-250 ml; la siringa serve per aspirare il residuo d'acqua che rimane sul fondo e nelle nostre prove era sufficiente quella da 10 ml.

Come cronometro gli studenti potrebbero anche usare il proprio smartphone, comunque non sono necessarie sensibilità superiori al centesimo di secondo.

È opportuno prevedere di fornire le postazioni di rotoli di carta assorbente e di una vaschetta per raccogliere l'acqua.

Gli studenti potrebbero avere bisogno di fogli protocollo dove scrivere le misure e di un foglio di carta millimetrata per il grafico.

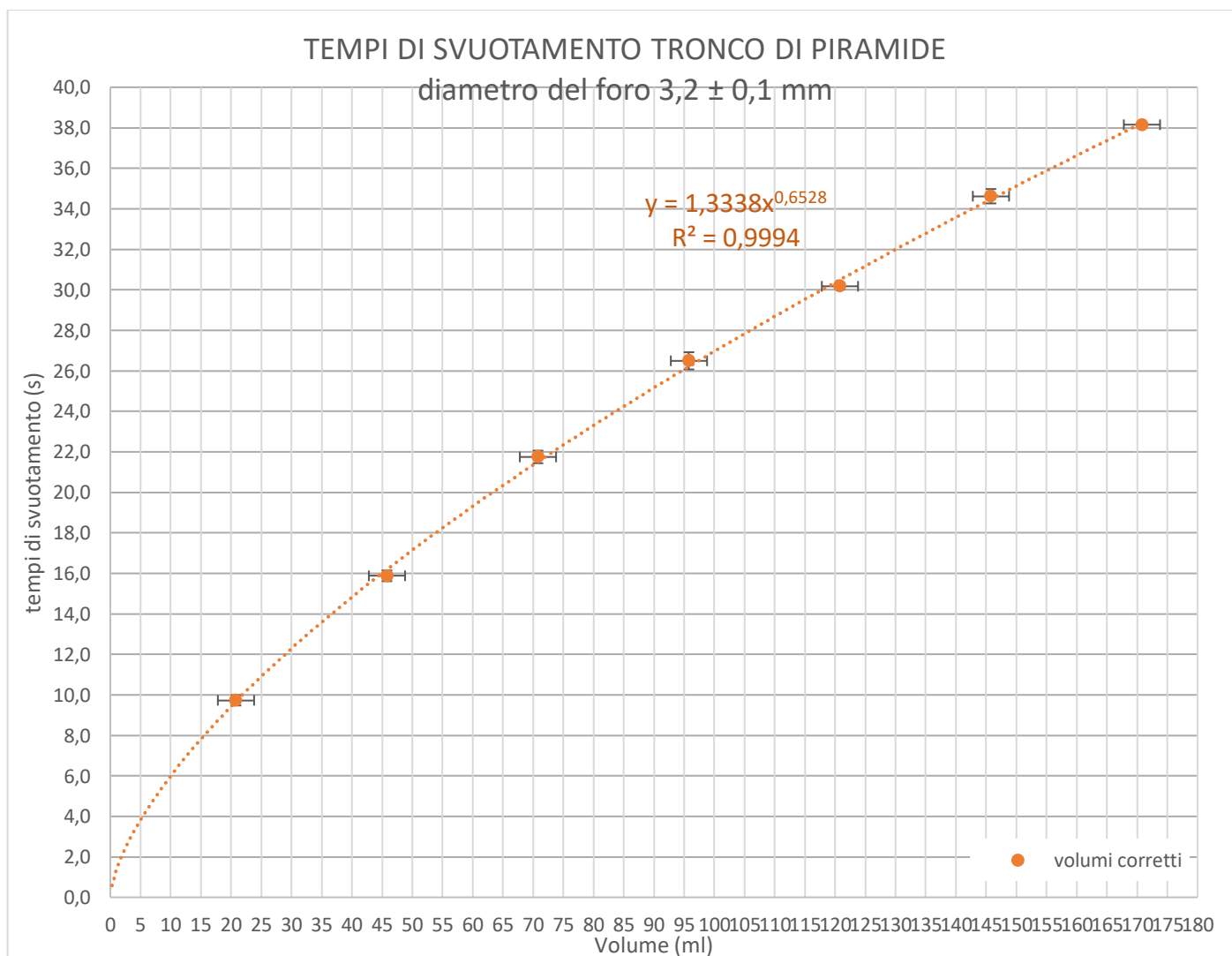
DESCRIZIONE DELLA PROVA

Si misura con il cilindro graduato una prima quantità d'acqua, ad esempio 175 o 180 ml, e si riempie il bicchierino “A” tenendo tappato il buco con un dito. Si apre il foro e si fa partire il cronometro che verrà fermato quando il flusso non è più regolare. Si potrà notare che a volte il flusso prima si assottiglia e poi si interrompe improvvisamente, a volte comincia a “gocciare” prima di interrompersi del tutto. Il cronometro dovrà essere fermato nel momento in cui comincia a gocciare, quando cioè il flusso si interrompe per la prima volta. All'interno del contenitore rimarrà un residuo d'acqua che dovrà essere aspirato con la siringa e ne dovrà essere registrato il volume. Si ripete l'operazione più volte, auspicabilmente almeno cinque, sempre facendo fluire la stessa quantità d'acqua, quindi si ricomincia cambiando il volume iniziale. Con i bicchierini descritti, che hanno una capacità massima di 200 ml, si possono facilmente fare anche 6-7 misure con volumi

diversi che variano di 25-30 ml ogni volta. Si potrà notare che il residuo d'acqua è praticamente costante, ma cambia a seconda del bicchiere e delle dimensioni del foro su fondo, e sarà in generale maggiore se il foro è piccolo.

Quelli presentati di seguito sono i risultati ottenuti da alcune nostre prove.

BICCHIERINO "A"									
diametro foro $3,2 \pm 0,1$ mm					media residui volume $4,2 \pm 0,4$ ml				
Volume misurato con il cilindro graduato (± 2 ml)	volumi corretti per il residuo (± 3 ml)	tempi di svuotamento ($\pm 0,01$ s)					media sui tempi di svuotamento (s)	semi dispersione massima (s)	deviazione standard (s)
25	21	9,4	9,9	9,6	9,8	9,9	9,7	0,3	0,2
50	46	16,1	15,7	16,1	15,8	15,6	15,9	0,3	0,2
75	71	21,4	21,5	22,1	21,8	22,0	21,7	0,3	0,3
100	96	26,9	26,6	26,4	26,6	26,0	26,5	0,4	0,3
125	121	30,0	30,3	30,3	30,2	30,1	30,2	0,2	0,1
150	146	35,1	34,7	34,4	34,6	34,4	34,6	0,4	0,3
175	171	38,1	38,1	38,2	38,2	38,1	38,1	0,1	0,1



Una volta costruito il grafico, lo si sfrutta per ricavare il diametro del foro del bicchiere “B” (quello del bicchiere “A” deve essere fornito, quello del bicchiere “B” ovviamente no). Bisogna ripetere la procedura descritta in precedenza con il bicchiere “B” e determinare i tempi di svuotamento per alcuni volumi (corretti). Ad esempio

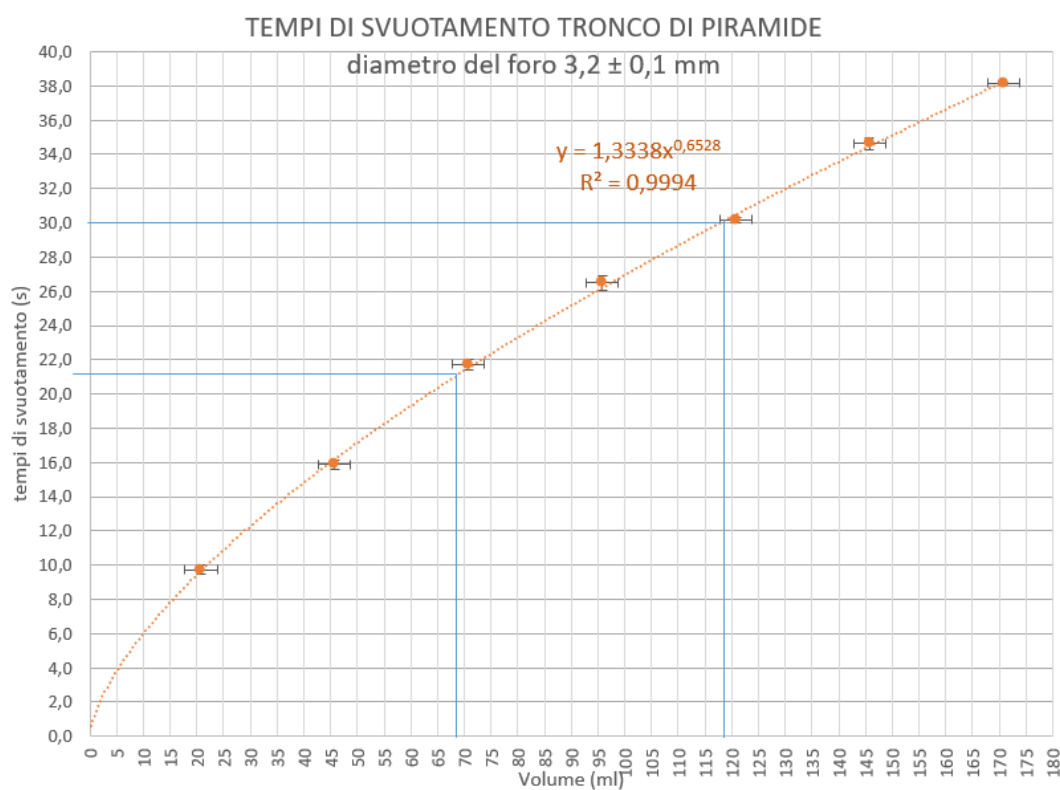
BICCHIERINO "B"									
diametro foro $2,8 \pm 0,1$ mm				media residui volume $6,2 \pm 0,2$ ml					
Volume misurato con il cilindro graduato (± 2 ml)	volumi corretti per il residuo (± 3 ml)	tempi di svuotamento ($\pm 0,01$ s)					media sui tempi di svuotamento (s)	semi dispersione massima (s)	deviazione standard (s)
75	69	32,1	31,3	31,6	31,8	31,7	31,7	0,4	0,3
125	119	44,5	45,8	45,5	45,2	45,3	45,2	0,7	0,5

Dal grafico si determina quale avrebbe dovuto essere il tempo di svuotamento dei volumi pari a 69 ml e 119 ml, se fosse stato impiegato il bicchiere “A”. Nel nostro caso dovevano essere rispettivamente circa 21.5 s e circa 30.0 s. Sapendo che, a parità di altre condizioni, il tempo di svuotamento è inversamente proporzionale all’area del foro d’uscita (eq. 1) - la relazione naturalmente è suggerita agli studenti - si ricava la dimensione del foro dalla seguente relazione:

$$a_A \cdot T_A = a_B \cdot T_B \quad \text{eq. 2}$$

Il diametro d_B del foro “B” sarà quindi dato da

$$d_B = d_A \cdot \sqrt{\frac{T_A}{T_B}} \quad \text{eq. 3}$$



Con i nostri dati otteniamo un diametro rispettivamente pari a 2.7 mm e 2.6 mm la cui stima dell'incertezza non può essere inferiore a ± 0.3 mm, se si tiene conto dell'indeterminazione sulle misure del volume (sia di "A" che di "B"), dei tempi di svuotamento e della dimensione del foro "A".

Una prova analoga, effettuata con un bicchierino il cui foro d'uscita era di 4.0 mm, ha dato i seguenti risultati:

BICCHIERINO "B"									
diametro foro $4,0 \pm 0,1$ mm					media residui volume $2,8 \pm 0,2$ ml				
Volume misurato con il cilindro graduato (± 2 ml)	volumi corretti per il residuo (± 3 ml)	tempi di svuotamento ($\pm 0,01$ s)					media sui tempi di svuotamento (s)	semi dispersione massima (s)	deviazione standard (s)
75	72	17,2	16,8	16,9	16,5	16,6	16,8	0,3	0,3
125	122	23,7	23,3	23,3	23,4	23,5	23,5	0,2	0,2
150	147	26,4	26,5	26,4	26,3	26,5	26,4	0,1	0,1

I valori del diametro ricavati sono stati rispettivamente 3.6 mm, 3.6 mm e 3.7 mm, sempre con un'incertezza stimata non inferiore a ± 0.3 mm. Comunque sia i valori ottenuti differiscono da quello "vero" al massimo del 10%.

La raccolta e l'elaborazione dei dati è a questo punto finita, ma vengono poi proposte agli studenti alcune riflessioni sulla "bontà" dei risultati ottenuti. Si chiede innanzitutto di capire quali sono le grandezze che generano la maggiore incertezza sui risultati. Per farlo dovranno confrontare gli errori relativi di ciascuna grandezza coinvolta. Nelle equazioni 2 e 3 il volume non compare, ma dall'analisi del grafico è chiaro che incida moltissimo.

Alla domanda di suggerire qualche metodo per migliorare la qualità dei risultati, ci si aspetta che non si limitino a dire che occorre usare strumenti dove l'errore di sensibilità sia minore. Se si considerano si vede chiaramente che non ha senso usare un cronometro al millesimo, perché le differenze rilevate tra essi sono comunque dell'ordine dei decimi di secondo, senza considerare l'errore dovuto ai riflessi dello sperimentatore, usualmente indicato pari a 0.1 s. Analogamente, cilindri graduati sufficientemente grandi non hanno generalmente graduazioni inferiori 5 ml. Occorre in realtà proprio trovare un altro metodo, uno dei quali potrebbe essere ad esempio derivare il volume dalla massa misurata con una bilancia di precisione.

SCHEMA PER LA VALUTAZIONE

PRIMA PARTE (punteggio massimo 28 p)				
	Punteggio massimo	Specifiche del punteggio	Punteggio	detrazioni
Lettura dello strumento: sensibilità e portata	5 p	Indica correttamente la sensibilità degli strumenti 1p per ogni strumento (cilindro graduato, siringa, cronometro)	1p x 3	<ul style="list-style-type: none"> • Assegnare 0 se la sensibilità non è corretta; • -0.5 se mancano le unità di misura
		Indica correttamente la portata degli strumenti 1p per ogni strumento (cilindro graduato, siringa)	1p x 2	<ul style="list-style-type: none"> • Assegnare 0 se la portata non è corretta; • -0.5 se mancano le unità di misura
Raccolta dei dati relativi allo svuotamento del bicchiere 1	15 p 3p x ogni volume fino ad un massimo di 15	Per ogni volume misurato: completa la tabella riportando correttamente i tempi di svuotamento (auspicabili almeno 5 prove). 0,2p per ogni svuotamento effettuato fino ad un massimo di 1 punto	0,2p x 5	
		Calcolo della media sui tempi di svuotamento (0.5p) e sui residui (0.5p)	1p	<ul style="list-style-type: none"> • Assegnare metà punteggio se gli svuotamenti per ogni dato volume sono stati solo due; • Assegnare 0 p se viene effettuato un singolo svuotamento per dato volume o se la media è errata.
		Calcolo dell'incertezza sulla media sui tempi di svuotamento e sui residui (semidispersione massima o scarto quadratico medio ¹)	0.5p	<ul style="list-style-type: none"> • Assegnare il punteggio solo se è stata calcolata una media • Assegnare 0,25 punti se l'incertezza è errata
		Indicazione (nell'intestazione) delle unità di misura degli strumenti	0.25 p	
		Indicazione (nell'intestazione) dell'incertezza dovuta alla sensibilità degli strumenti	0.25 p	
Grafico	8 p	Tabella con i volumi corretti (sottrazione del volume residuo da quello misurato)	1 p	<ul style="list-style-type: none"> • Assegnare 0 punti se i dati dei volumi riportati non sono quelli corretti • -0.5 se mancano le unità di misura • -0.5 se le incertezze non ci sono o sono incompatibili
		Dimensioni del grafico (i dati devono occupare almeno $\frac{3}{4}$ dello spazio massimo disponibile per ogni asse 1 p)	1p	<ul style="list-style-type: none"> • - 0,25 p per ogni asse occupato per meno di $\frac{3}{4}$ delle sue dimensioni massime

¹ Nel caso in cui la semidispersione massima o lo scarto quadratico medio risultino inferiori all'errore dovuto alla sensibilità, tenere come corretto l'errore di sensibilità

		Indicazione delle grandezze riportate sugli assi	1 p (0,5 x 2)	
		Indicazione delle unità riportate sugli assi	1p (0,5 x 2)	
		I punti utilizzati sono quelli corretti per il residuo	1 p	
		I punti (indipendentemente dal fatto che siano quelli corretti per il residuo oppure no) sono posizionati correttamente	1 p	<ul style="list-style-type: none">• -0,2 per ogni punto non posizionato correttamente nel grafico
		Barre d'errore	1p	<ul style="list-style-type: none">• Assegnare 0 punti se assenti• -0,1 per ogni barra (orizzontale o verticale) di dimensioni non corrette.
		Linea interpolante	1 p	<ul style="list-style-type: none">• Assegna 0 se viene chiaramente detto che la relazione è lineare, o è tracciata una retta che interpola bene i dati ma incontra gli assi NON nell'origine, o è tracciata chiaramente una retta passante per l'origine e non interpola bene i dati.• -0.5 se la curva si riduce ad un segmento che ha per estremi due punti qualunque delle barre d'errore del valore più basso e più alto e interpola bene tutti i dati.• Assegna 0.3 se è una spezzata, ma solo se passante per l'origine, altrimenti 0;• -0.2 p se, pur essendo una curva passante per l'origine, è chiaramente identificabile una curva migliore
SECONDA PARTE (punteggio massimo 36 p)				
Raccolta dei dati relativi allo svuotamento del bicchiere 2	6 p 1,5 p x ogni volume fino ad un massimo di 6	Per ogni volume misurato, indipendentemente dal numero di prove ripetute fino a un massimo di 2 p	0,5px4	
		Calcolo della media sui tempi di svuotamento (0.5p) e sui residui (0.5p), per ogni dato volume misurato Fino ad un massimo di 4	1p x4	<ul style="list-style-type: none">• Assegnare metà punteggio se gli svuotamenti per ogni dato volume sono stati solo due;• Assegnare 0 p se viene effettuato un singolo

				svuotamento per dato volume o se la media è errata.
Tabella 4	14 p	Lettura corretta dei tempi sul grafico 1 p per ogni volume considerato fino ad un massimo di 4 p	1p x 4	<ul style="list-style-type: none"> • Metà punteggio se vengono riportati i tempi riferiti a volumi non corretti per il residuo.
		Determina la relazione corretta tra tempi e diametro d_B ($Area_A \cdot T_A = Area_B \cdot T_B$ dove Area sta per area del foro e T per tempo di svuotamento. Da questa si ricava la relazione $d_B = d_A \cdot \sqrt{T_A/T_B}$)	5p	<ul style="list-style-type: none"> • Metà punteggio se al posto dell'area indica il diametro usa cioè $d_B = d_A \cdot (T_A/T_B)$.
		Calcolo corretto dei dati	5p	<ul style="list-style-type: none"> • Metà punteggio se in tabella indica l'area anziché il diametro. • 0 punti per ogni calcolo non corretto
Determinazione del diametro del foro	7 p	Diametro del foro (solo se esegue una media dei risultati ottenuti)	2p	<ul style="list-style-type: none"> • 1 p se esegue la media su due valori
		Bonus punteggio <u>SOLO</u> se il risultato è stato ottenuto correttamente, vale a dire utilizzando la proporzionalità dei tempi con l'area (e non con il diametro), e le dimensioni risultanti differiscono da quelle vere per non più del 15%	5p	
Cause di incertezza su d_B	4 p	Deve essere indicato chiaramente la grandezza che presenta il maggiore errore relativo, deve essere considerato anche il volume e spiegato che esso incide sulla determinazione dei tempi T_A tramite il grafico.		<ul style="list-style-type: none"> • 0 punti se non analizza le incertezze relative, ma quelle assolute • 1 p se elenca gli errori relativi sui tempi e su d_A, ma non prende in considerazione quello relativo al volume • 2 p se elenca gli errori relativi, compreso quello relativo al volume • 4 p se oltre a prendere in considerazione l'errore relativo sul volume spiega che esso incide sulla forma del grafico e quindi sul valore di T_A.
Suggerimenti per migliorare le misure	5 p	Spiega vantaggi e procedure per l'utilizzo di strumenti alternativi (ad esempio bilancia di precisione per determinare i volumi di acqua)		<ul style="list-style-type: none"> • 0 p se indica solo in modo generico che occorre usare strumenti più sensibili • 2 p Propone degli strumenti alternativi per effettuare le misure, ma non ne spiega l'uso e/o i vantaggi rispetto a quelli usati.

